**(1086).** D'Amore, B. (2024). Didáctica de la Matematica como disciplina científica: teorías y relaciones entre teorías. En: Jorge E. Sagula, *Tendencias en investigación en Educación Matemática*, Actas del Congreso homónimo. Universidad de Luján, Argentina, 16-17 V 2024, pp. 8-14. Conferencia.

# Didáctica de la Matematica como disciplina científica: teorías y relaciones entre teorías

Bruno D'Amore
Doctorado en Educación matemática, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá (Colombia)
bruno.danore@unibo.it

Martha Isabel Fandiño Pinilla
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna (Italia)

Palabras clave: Educación Matematica, teorías de la Educación Matemática.

Resumen.
En este texto se proponen y defienden las siguientes afirmaciones: la Educación Matemática es una disciplina científica que forma parte de la Matemática Aplicada; se enumeran y presentan las principales teorías que constituyen la Educación Matemática.

## 1. Didáctica de la Matemática como disciplina científica

En primer lugar, hay que afirmar explícitamente que la actividad de investigación en Educación Matemática sólo puede ser realizada y practicada por matemáticos, es decir por personas que dedican su vida al estudio de la Matemática, cuya competencia en Matemática sea profunda, mucho más de lo que se aprende en los programas de estudio, como un hecho personal, vinculado a un interés científico especulativo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2021a).

En varias ocasiones hemos comprobado que existen matemáticos, profesores universitarios, por tanto matemáticos activos en investigación de la disciplina, que ni siquiera saben que existe una disciplina propia, que se llama "Educación Matemática", disciplina que está dotada de carácter académico, de dignidad académica, tanto como para ser denominación propia de una carrera específica ya sea en la carrera básica de Matemática o en cursos de maestría en Matemática o en la carrera de formación de futuros profesores de educación primaria o en cursos de posgrado para la formación de futuros docentes de secundaria o docentes en servicio o en doctorados y posdoctorados específicos.

Estos suelen confundir la denominación específica de sentido bien connotado "Didáctica (de la Matemática)" con el término genérico "didáctica" que para muchos incluso es considerado sinónimo de "horas dedicadas a la enseñanza"; por lo tanto confunden una disciplina de investigación específica, estructurada científicamente a nivel internacional, que se basa en el trabajo asiduo de un gran grupo de investigadores de todos los continentes con una actividad rutinaria común a todos los docentes, es decir con una actividad laboral para realizar la cual generalmente se considera necesario dominar la materia impartida.

Quizás la culpa de todo esto la tenga el nombre dado en los orígenes a esta disciplina, nacida oficialmente, como hemos visto, a mediados de los años ‘80 del siglo XX (y por tanto aún en su primer medio siglo de vida oficial). Cuando sus creadores le pusieron ese nombre, Educación Matemática, ciertamente no imaginaban la confusión antes descrita, que se habría creado y que ha continuado durante décadas.
Otros (matemáticos y no matemáticos) confunden este tipo de interés con la Pedagogía, creyendo que es más adecuado delegar a ese mundo los problemas que tienen que ver con la escuela; pero la Educación Matemática debe ser considerada, como estamos mostrando en este texto, una actividad de investigación de carácter matemático, para lo tanto se necesitan profesionales (investigadores) matemáticos formados de manera específica.
Otros más la confunden con la Psicología, con la búsqueda de buenas prácticas, con el sentido común, con la experiencia, …
No en todos los países nuestra forma de ver la Educación Matemática como una disciplina científica independiente está ya definitivamente aceptada y, sin embargo, está cada vez más extendida. Ya hemos dicho varias veces que, en Italia, por ejemplo, la Educación Matemática forma parte del grupo disciplinar MAT/04 (MIUR, Ministerio de Universidad e Investigación), por lo que oficialmente forma parte íntegramente de Matemática:
MAT/01 Lógica matemática
MAT/02 Álgebra
MAT/03 Geometría
MAT/04 Matemáticas complementarias (incluye los siguientes cursos universitarios: Matemática elemental desde un punto de vista superior, Matemáticas complementarias, Educación matemática, Historia de la matemática y otros)
MAT/05 Análisis matemático
MAT/06 Probabilidad y Estadística
...
Existen cursos en Educación Matemática en todo el mundo que se pueden seguir después de haber obtenido el título de Licenciatura o Laurea en Matemática, Maestría en Matemática con enfoque didáctico, Maestría en Educación Matemática, Doctorado en Educación Matemática, Postdoctorado en Educación Matemática.
Aún se debate el tema de la tipología de nuestra disciplina. Según nosotros, autores de este texto, la Educación Matemática pertenece a la tipología de las denominadas Matemáticas Aplicadas. [Sobre una breve historia (insertada en la Historia de la Matemática) de la Educación Matemática y la evolución de la idea de Matemática aplicada, ver: D’Amore y Sbaragli (2020); pero volveremos a este tema explícitamente en las páginas siguientes].
La confusión entre Educación Matemática y Pedagogía sigue viva con mucha fuerza, tanto es así que hemos decidido dedicar varios artículos (por ejemplo: D’Amore, Fandiño Pinilla, 2020b) a ilustrar algunas investigaciones en Educación Matemática que, para comprender el significado de las mismas, es necesario una competencia matemática profesional, en cuanto matemáticos, ni siquiera puede ser comprendida por profesores de primaria no investigadores ni por pedagogos recurriendo sólo al conocimiento de Pedagogía.
La Pedagogía fue de gran utilidad en las etapas iniciales, cuando fue necesario crear desde cero bases científicas sólidas para que la Educación Matemática perfilara las especificidades de sus investigaciones. Obviamente recurrimos a la Matemática, a la Epistemología de la Matemática y de la Historia de la Matemática, pero también a la Pedagogía, a la Didáctica General, a la Psicología del aprendizaje, a la Semiótica, a la Filosofía, a la Lingüística… y a otras disciplinas para luego establecer algunos conceptos básicos de la Educación Matemática propios del caso del objeto de aprendizaje Matemática. Fue un esfuerzo conjunto y difuso de los primeros investigadores en Educación Matemática, que duró varias décadas y que, en ciertas direcciones cada vez más específicas, aún está en progreso. Pero ahora la Educación Matemática tiene su propio estatus científico; de ahí que nos resulte ridículo que en algunos países y según algunos profesores universitarios se pueda todavía

sostener la tesis de que, para la formación de los futuros profesores de Matemática, la secuencia adecuada podría ser la simplista siguiente: primero rigurosos y bien fundamentados conocimientos en Matemática y luego estudios de Pedagogía.

Si bien estamos totalmente de acuerdo en cuanto al primer punto, por las razones expuestas en Fandiño Pinilla (2011), estamos totalmente en desacuerdo en el segundo, no porque la Pedagogía no sea interesante, atractiva o útil, sino por dos razones:
a) todo lo que de Pedagogía se necesita (teórica y empíricamente) en la investigación científica y en la práctica docente escolar cotidiana ya ha sido resaltado e incorporado a la Educación Matemática actual;
b) en Educación Matemática encontramos mucho más explícito, todo lo que profesionalmente necesita una persona experta en Matemática (realmente experta) en la realización de las acciones profesionales necesarias para lograr que, gracias a su enseñanza, los estudiantes puedan aprender Matemática.
Nótese bien: el verdadero problema subyacente no es cómo, qué y cuándo enseñar Matemática, sino hacer que los estudiantes las aprendan.
Entonces nuestra propuesta en el punto b), sucesiva al a), es la siguiente: un curso real, profundo, técnico en Educación Matemática, pero impartido por alguien que sea un experto específico en esta disciplina, no un profesor universitario cualquiera (por motivos expuestos en D'Amore y Fandiño Pinilla, 2013).
Por lo tanto, en varias ocasiones hemos presentado a audiencias de matemáticos profesionales, profesores universitarios e investigadores activos en diferentes campos de la Matemática algunas investigaciones empíricas realizadas en diferentes niveles escolares sobre algunos temas que, a veces sorprendentemente, han demostrado ser complejos para los estudiantes.
Volvemos a subrayar explícitamente: si el análisis de estas dificultades de aprendizaje fuera abordado, comprendido y resuelto por un pedagogo, un experto en Pedagogía, pero no experto en Matemática (ni, en consecuencia, en Educación Matemática), no existiría ninguna esperanza de llegar al fondo del problema. Sólo un experto matemático, y en concreto un experto también en Educación Matemática, puede comprender plenamente las motivaciones, las causas de las dificultades del estudiante y, por tanto, con base en sus estudios específicos, tratar de encontrar un recurso que favorezca el aprendizaje deseado por parte del estudiante.

Otra consideración que se basa en actitudes superficiales de algunos ingenuos expertos disciplinarios, sin formación específica en Educación Matemática, es la de quienes afirman (quizás realmente convencidos) que la dificultad de los estudiantes depende de la insuficiencia del currículo (o programa) nacional de los estudios de Matemática de los cursos preuniversitarios. Esta sigue siendo una posición ingenua: no es cambiando el currículum (insertar este tema, eliminar aquel) como se resuelve el problema.
Ya hemos visto cómo, a finales de los años '60 y luego a lo largo de los años '70, en todo el mundo se trató frenéticamente de cambiar los planes de estudios nacionales de Matemática, empezando por Francia y Estados Unidos; para después afectar a todas las naciones. Fue el momento del nacimiento de las infames Nuevas Matemáticas y denominaciones similares, dominadas por la inclusión de una teoría de conjuntos llamada "ingenua" en lugar de la tradicional Matemática escolar, desde la escuela primaria. Fueron los años del triunfo estructural de los bourbakistas; pero una cosa es intentar crear un lenguaje matemático común a toda la Matemática como ciencia (y esto los bourbakistas lo hicieron con éxito) y otra muy distinta es imponerlo en el mundo escolar.
Como hemos visto, no fueron los profesores, ni los pedagogos, ni los psicólogos quienes frenaron esta forma absurda de hacer las cosas, fueron los matemáticos; famosos son los gritos negativos incluso de los premios Fields. Y fue el matemático francés Guy Brousseau quien, rebelándose contra tanta locura, logró estudiar todo esto desde un punto de vista científico, mostrando sus errores y su

negatividad, sancionando así el nacimiento de esa disciplina que hoy se llama Educación Matemática. Sabemos que nos estamos repitiendo.

En muchos países las cosas se prolongaron más que en otros, en algunos la ola de la Nueva Matemática ni siquiera llegó, al menos no de forma tan explícita. En estos últimos países los cambios se produjeron por otros motivos, relacionados por ejemplo con los préstamos solicitados a la AIF (Asociación Internacional de Desarrollo), el organismo del Banco Mundial que concede dichos préstamos, pero solicita cambios drásticos e innovadores en el programa de enseñanza, especialmente en disciplinas científicas (principalmente en Matemática) y en materias técnicas. La idea es poder garantizar la devolución del préstamo en 20 años, gracias a la mejora cultural del país, gracias a la renovación de sus programas de estudio. Una idea ganadora, una auténtica garantía.
Y así, para comprobar que un país que solicitaba un préstamo proponía realmente un programa innovador que podía garantizar una verdadera renovación positiva de esa nación, el Banco envió expertos en misión en estos países para comprobar que lo que se proponía era coherente y prometedor, que constituía la garantía requerida. Por lo general, se enviaban como expertos a personas con experiencias sobre el funcionamiento de la escuela, los programas y los planes de estudio, es decir, en su mayoría directores escolares o ministeriales con amplia experiencia, así como pedagogos.
Pero a inicios de 1990 un matemático que ahora es considerado un erudito en Educación Matemática fue enviado como experto por un banco internacional a un país llamado "en desarrollo" que había prometido cambios drásticos en el plan de estudios en Matemática (la disciplina en la cual más que cualquier otra el banco pidió cambios, mejoras y modernizaciones, siendo la disciplina impulsora de los sectores científicos, tecnológicos y financieros).
Este matemático (que no era un director escolar ni ministerial, sino un investigador matemático, el mismo que tuvo que ver con las últimas experiencias públicas de Papy y Dienes, ya mencionadas) se quedó sin palabras leyendo los programas propuestos por el joven ministro de educación, inspirado e influenciado por quién sabe quién; en estos programas se hablaba de: monoide, grupos, dominios de integridad, ¡anillos, campos vectoriales, álgebra de Boole... en la escuela primaria! Es evidente que se trataba solo de una forma torpe de intentar hacer creer al banco que se había dado seguimiento en este país a las solicitudes. Creemos que el joven ministro no tenía ninguna idea de que significaban estos términos. Así que el matemático experto señaló que se trataba de una tentativa totalmente sin sentido de obtener el préstamo.
Si en lugar de un matemático se hubiese enviado a un experto en técnicas escolares o en trabajo de grupo o a un directivo, esos términos utilizados podrían haber sido interpretados como garantía de renovación escolar, como quizás ha sucedido en otros países, como contenidos matemáticos modernos y necesarios para una nación que quiere desarrollarse rápidamente técnica y culturalmente…
No es dando nombres altisonantes a aspectos de la matemática de alto nivel como se cambia una educación nacional, un currículo; pero sólo un experto en la disciplina es capaz de darse cuenta de esto.

Estamos hablando de un tema profundo y decisivo: la investigación en Educación Matemática debe ser realizada por matemáticos profesionales porque sólo ellos, con su experiencia, pueden comprender los resultados y por tanto proponer soluciones, no sólo en el campo de la enseñanza sino sobre todo en el del aprendizaje.
Tenemos varios ejemplos sobre este tema a los cuales nos referiremos más adelante, en un capítulo posterior, porque ahora tenemos la obligación de continuar por el camino que se va perfilando y que consiste en (de)mostrar por qué, para nosotros, hoy se cree que la Educación Matemática es parte de la Matemática Aplicada.

## 2. La Educación Matemática como Matemática aplicada.

Aprovechamos entonces para explicar que para nosotros la Educación Matemática, disciplina específica de la grande familia de la Matemática, puede interpretarse como uno de los muchos componentes de la llamada Matemática aplicada, por tanto «una rama de la Matemática que se ocupa del estudio de las técnicas matemáticas utilizadas en la aplicación del conocimiento matemático a otros campos científicos y técnicos», como siempre se oye e incluso se lee en Wikipedia. Hasta el día de hoy no existe un consenso científico universal, consciente y total sobre cuáles son las ramas de la Matemática aplicadas, por diversas razones. Habitualmente se hace referencia a cómo la Matemática debe ser considerada un método para el estudio o la aplicación concreta en los más variados campos, en Ingeniería, en Biología, en Física, en Química, en Medicina, en Economía, en Finanzas, en Construcción, en Climatología, en Astronomía, ...

Hay quienes dicen estar sorprendidos por el poder y el éxito de la Matemática en todos estos numerosos y múltiples campos de aplicación, a menudo tan diferentes entre sí. En este sentido, recordamos al físico y matemático estadounidense naturalizado húngaro Eugene Paul Wigner (1902 – 1995), asistente de David Hilbert (1862 – 1943) en Göttingen en 1927, estrecho colaborador de John von Neumann (1903 – 1957), amigo íntimo de Albert Einstein (1879 – 1955) y premio Nobel de física en 1963. Uno de sus famosos y valiosos libros de divulgación científica, publicado por primera vez en 1960, lleva el significativo título: *La irrazonable eficacia de la Matemática en las ciencias naturales* (Wigner, 1960). En ese libro, Wigner da una respuesta filosófica y científicamente sensata a una gran verdad: la Matemática es el lenguaje más natural y significativo de las ciencias naturales, como ya había afirmado Galileo Galilei (1564 – 1642), pero ampliando los ejemplos a casos y situaciones que Galileo ni siquiera podría haber imaginado.

También sugerimos la lectura esclarecedora de una muy breve historia específica de la Matemática aplicada (Stolz, 2002).

Pero entretanto se han logrado avances considerables, extendiendo las aplicaciones de la Matemática a muchas otras actividades humanas, no sólo de naturaleza ingenieril o científica “fuerte”; hoy en día existen otros campos en los cuales se ha aplicado la Matemática: Lingüística, Semiótica, Psicología, Arte, hasta en el reconocimiento de los autores de textos anónimos, ... Por tanto, el método matemático hoy nos permite proponer aplicaciones a sectores hasta ahora no tenidos en cuenta, no necesariamente proporcionando modelos que tengan su base en el Análisis o en la Geometría o en la Probabilidad, sino en un sentido mucho más amplio, por ejemplo, como método de comparación de datos, de teorización, de argumentación, de estructuración lógica, de deducción.

Entre estos campos no “fuertes”, nos gusta proponer el ejemplo en el mundo del Arte y la Crítica de Arte (pero no nos detenemos, remitiéndonos a D’Amore, 2015); otras aplicaciones interesantes se encuentran en problemas que, hasta hace unas décadas, parecían pertenecer sobre todo a la Pedagogía y la Psicología (D’Amore, 2021).

Un buen ejemplo que citamos a favor de nuestra postura, ni tan reciente, de reconocimiento oficial de esta manera amplia de ver por parte de los investigadores en Matemática aplicada fue, en nuestra opinión, la Reunión Conjunta UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*, celebrada en el Departamento de Matemática de la Universidad de Turín en julio de 2006. La idea (que inmediatamente nos pareció brillante) se debe sin duda a Ferdinando Arzarello.

Un sector específico de aquel encuentro estuvo dedicado a las aplicaciones de la Matemática a la Educación Matemática, quizás el sector más seguido en aquella ocasión, probablemente por la curiosidad que despertó esta nueva entrada. Los textos de las conferencias de los distintos invitados (Colette Laborde, Claire Margolinas, Maria Alessandra Mariotti y Ornella Robutti), los de los *reactors* (Paolo Boero y Jean Baptiste Lagrange), los de los invitados con contribuciones temáticas (nueve en total), el de la mesa redonda (en la cual participaron Ferdinando Arzarello, Giampaolo Chiappini y Jean Philippe Drouard) y el de una sesión especial que incluyó varias intervenciones adicionales, se publicaron íntegramente en el número 1, vol. 21, de la revista *La matematica e la sua didattica* (vol. 21, n. 1, abril de 2007).

En esta ocasión, en nuestro seminario abordamos el tema de las diferentes interpretaciones por parte de los estudiantes (de cualquier nivel escolar) de la representación de un determinado objeto

matemático sometido a transformaciones semióticas. Ahora bien, si bien el fenómeno vinculado a las transformaciones de conversión (pasar de una representación semiótica a otra cambiando de un registro semiótico a otro, por ejemplo pasar de escrituras algebraicas a representaciones geométricas) ha sido ampliamente estudiado [consideremos el trabajo realizado por el principal estudioso internacional de esta problemática, Raymond Duval, 1995, 2017; Duval, Sáenz-Ludlow, 2016], el mismo fenómeno relacionado con las transformaciones de tratamiento (paso de una representación semiótica a otra, pero dentro de un mismo registro semiótico, como podría ser en una transformación algebraica) había sido descuidada por la investigación (sin embargo, en la práctica escolar esta dificultad de los estudiantes es ampliamente reportada por sus profesores y por la investigación empírica) (D'Amore, 2007b; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2001, 2007c, 2008; D'Amore, Fandiño Pinilla, Santi & Sbaragli, 2011).
Este fenómeno didáctico (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2007a), constituyó la base común de dos doctorados de investigación, uno en Italia y otro en Colombia, realizados respectivamente por: George Santi en la Universidad de Palermo y por Pedro Javier Rojas Garzón en la Universidad Francisco José de Caldas en Bogotá (Santi, 2010, 2011; Rojas Garzón, 2014).
Para ilustrar la cuestión con algunos detalles más, recurrimos a las siguientes aclaraciones que extraemos de D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2013).
A la adquisición-construcción conceptual-cognitiva de un objeto (matemático) la llamamos "noética". Consideramos como características semióticas de la actividad matemática la representación de un objeto (matemático) dentro de un registro semiótico apropiado y las transformaciones de tratamiento y conversión de esta representación.
Indicamos:
$r^m$: registro semiótico (m = 1, 2, 3…);
$R^m{}_i(A)$: i-ésima representación semiótica (i = 1, 2, 3…) de un objeto (matemático) A en el registro semiótico $r^m$.
Del objeto A que se quiere representar, se eligen los rasgos distintivos sobre los cuales se quiere resaltar;
a esta representación en un registro semiótico dado $r^m$ se la denota por $R^m{}_i(A)$;
se puede realizar una transformación de tratamiento pasando, en el mismo registro semiótico $r^m$, a otra representación diferente de A, sea $R^m{}_j(A)$ ($i \neq j$) (j = 1, 2, 3…);
se puede realizar una transformación de conversión pasando a una nueva representación de A en otro registro semiótico (diferente) $r^n$ ($n \neq m$), sea $R^n{}_h(A)$ (h = 1, 2, 3…).
Sabemos, especialmente por la investigación empírica clásica en Educación Matemática, que el estudiante (de cualquier nivel escolar) tiene grandes dificultades para reconocer el mismo objeto A en las dos representaciones semióticas obtenidas entre sí por conversión; pero hemos observado en nuestras investigaciones en las aulas que a menudo surge una dificultad similar incluso si las dos representaciones semióticas se obtienen mediante tratamiento.

Pero volvamos a una discusión más general, que abandonamos páginas atrás.
Estamos ante una disciplina matemática, la Educación Matemática, aplicada a problemas relativos a la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, en un entorno escolar o universitario; esta disciplina, hoy consolidada y estable, pasa por un esclarecimiento definitivo de sus vínculos con algunas otras disciplinas que le han proporcionado herramientas y temáticas, como la Didáctica general, la Pedagogía, otras Didácticas disciplinarias. Pero en la específica Educación Matemática se encuentran necesidades de análisis, teorización y utilización de muchas otras disciplinas; obviamente, primero y principalmente la Matemática y luego la Epistemología de la Matemática y la Historia de la Matemática, la Semiótica (pensemos, por ejemplo, en las complejidades del lenguaje simbólico de los diferentes componentes de la Matemática que a menudo tienen semióticas específicas, como el Álgebra o el Análisis o la Lógica matemática); Teorías del lenguaje; Psicología del aprendizaje… A lo largo de las décadas, estudios específicos en Educación Matemática han permitido relacionar todo ello con otros elementos externos pero característicos de nuestra disciplina, es decir adaptarlos a

necesidades internas específicas y por tanto hoy en día la formación en este campo de la investigación ya incluye todo lo específico de estas disciplinas. Sin tener que recurrir a generalizaciones, sino centrándonos únicamente en necesidades específicas a este punto.

**3. Diferentes teorías en Educación Matemática. Estudios comparativos.**

Exactamente como sucede en los distintos campos específicos de la Matemática, a lo largo de las décadas se han sucedido evidentemente numerosos estudios teóricos, sobre todo basados en diversos resultados de investigaciones empíricas y/o en campos de estudio y análisis específicos. Imposible enumerarlos y comentarlos todos. Nos limitamos a una lista (no cronológica, salvo la número 1) sólo para dar una idea de la multiplicidad de campos de estudio. Además del tema y/o nombre de la teoría, incluimos el nombre del investigador quien es para nosotros el exponente más significativo del estudio específico. Se ha convertido casi en una costumbre (no absoluta) dar el nombre de "teoría" a estos campos de investigación o modos de interpretar los resultados (a menudo empíricos) obtenidos, como hizo Guy Brousseau al comienzo de su aventura científica.

1. Teoría de las situaciones (Guy Brousseau).
2. Teoría antropológica de la didáctica (Yves Chevallard).
3. Constructivismo (Ernst von Glaserfeld (1917–2010)).
4. Fenomenología didáctica (Hans Freudenthal (1905–1990)).
5. Dialéctica instrumento – objeto (Régine Douady (1935–2006)).
6. Modelo Van Hiele sobre enseñanza – aprendizaje de la geometría (Dina van Hiele Geldof (1912 – 1958) y Pierre van Hiele (1909 – 2010) (modelo 1957)).
7. APOS [Acciones, Procesos, Objetos (mentales), Esquemas (cognitivos))] (Edward Dubinsky (1935 – 2022)).
8. Interaccionismo didáctico (Heinrick Bauersfeld (1926 – 2022)).
9. La naturaleza del aprendizaje matemático (Tommy Dreyfus).
10. Factores emocionales en el aprendizaje de las matemáticas (Richard Skemp (1919 – 1995)).
11. Teoría de los conceptos figurales (Efraim Fischbein (1920 – 1998)).
12. Tres mundos de la matemática: conceptual, operacional, axiomático (David Tall).
13. Teoría de los campos conceptuales (Gérard Vergnaud (1933 – 2021)).
14. Campos conceptuales, campos de experiencia, campos semánticos (Paolo Boero).
15. Enfoque instrumental de la educación matemática (Pierre Rabardel (1945 – 2021)).
16. Commognición (comunicación – cognición) (Anna Sfard).
17. Enfoque socio–epistemológico – Matemática Educativa (Ricardo Cantoral (1958 – 2021)).
18. Teoría de los registros semióticos (dimensión semio-cognitiva) (Raymond Duval).
19. Enfoque ontosemiótico EOS (Juan Godino).
20. Haz semiótico (Ferdinando Arzarello).
21. Mediación semiótica (Mariolina Bartolini Bussi y Maria Alessandra Mariotti).
22. Teoría de la objetivación (Luis Radford).

Se realizó en el NRD de Bolonia recientemente un análisis detallado, pero extremadamente conciso, de cada una de estas teorías (Asenova y otros, 2023).

Naturalmente, ya existen muchos estudios teóricos y también investigaciones empíricas destinadas a resaltar las similitudes y diferencias entre estas teorías, por ejemplo, en función con los fines para los cuales nacieron. Algunos análisis pretenden captar las diferencias entre estas teorías, otros quieren compararlas de manera positiva y constructiva, basándose en los resultados más significativos obtenidos.

Dos estudios analíticos generales que consideramos particularmente significativos desde este punto de vista son los de Prediger, Bikner–Ahsbahs y Arzarello (2008) y de Bikner–Ahsbahs, Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue y Sabena (2010).

Otros estudios dedicados a resaltar analogías o diferencias o ambas entre teorías son muy numerosos en los últimos años; nos limitaremos a mencionar algunos en orden cronológico (D'Amore & Fandiño

Pinilla, 2018a, b, 2020a, b, 2021a, b; Fandiño Pinilla, 2017, 2020a, b; Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori & Santi, 2020a, b).
Pero las nuevas teorías nacen con objetivos muy específicos, no sólo para absorber o incluir teorías anteriores, sino también para estudiar factores que las teorías precedentes pasaron por alto o para estudiar hechos en los cuales las teorías anteriores no estaban interesadas (D'Amore, 2007a).
Por lo tanto, las teorías construidas después de la Teoría de situaciones muchas veces tuvieron objetivos diferentes, fueron aceptadas con interés y curiosidad en el panorama de la investigación internacional, pero casi nunca fueron propuestas para reemplazar las teorías anteriores porque estas nuevas teorías casi siempre tienen objetivos de análisis y diferentes propósitos investigativos.
Este tema, el de las relaciones entre teorías o investigaciones que resaltan analogías o contrastes entre resultados de investigaciones empíricas, es uno de los temas más fascinantes de las investigaciones actuales, en nuestra opinión (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2017).

**Bibliografía**


Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Fúneme Mateus, C. C., Iori, M., & Santi, G. (2023), *Teorie rilevanti in didattica della matematica*, Bologna: Bonomo.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020a). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. The theory of objectification and the theory of didactical situations: An example of comparison between theories in mathematics education. *La matematica e la sua didattica*, *28*(1), 7-61.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020b). Análisis de algunos aspectos de la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa: Dossier Temático Teoría de la Objetivación*, *5*(2), 33-50.

Bikner–Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Editors), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 145–175. Belo Horizonte, Brasil: PME.

D'Amore, B. (2007 a). Voces para el diccionario: F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi & W. Wiater (Eds.), *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto.* Torino: Bollati Boringhieri. Voces: Didattica disciplinare (pagg. 72-75); Scienza (pagg. 335-337). [Edición en idioma alemán: (2010). *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. Fachdidaktik (pp. 98-101), Mathematische Bildung (pp. 227-228), Naturwissenschaftliche (pp. 255-258), Wissenschaft (pp. 362-364)].

D'Amore, B. (2007b). Mathematical objects and sense: how semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23–45.

D'Amore, B. (2015). *Arte e matematica. Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*. Bari: Dedalo.

D'Amore, B. (2021). *La matematica come strumento critico. Riflessioni su didattica, storia, letteratura, arte, magia e religioni*. Bologna: Pitagora. (Nueva edición 2023, Bologna: Bonomo).

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, *21*(1), 87–92. [Atti del: Joint Meeting of UMI–SIMAI/SMAI–SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006].

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Sciences and Educational Technology*. Vol. 1. Nicosia: Intercollege Press. Pp. 111-130.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007c). Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers [Communication article with referees]. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), 13-15 april 2007, Rhodes, Greece. Athens: New Technologies Publications. Pp. 383-396.
D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007c). Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers [Communication article with referees]. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), 13-15 april 2007, Rhodes, Greece. Athens: New Technologies Publications. Pp. 383-396.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007c). Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers [Communication article with referees]. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), 13-15 april 2007, Rhodes, Greece. Athens: New Technologies Publications. Pp. 383-396.
D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). La didattica della didattica della matematica: esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *36B*(4), 325-353. [En idioma español: D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. In B. D'Amore & L. Radford, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Pp. 41-66].

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática. Theoretical reflections on the basis of the onto–semiotic approach to Didactic of Mathematics. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López–Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23–26 marzo 2017. Sito web: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2018a). Su alcuni termini che hanno avuto ampia rilevanza agli albori della costruzione scientifica della didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 247-291.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2018b). Relectura de un artículo publicado en 2000 con la visión crítica del 2018: ¿qué queda?, ¿qué perspectivas se alcanzaron?, ¿qué metas son aún lejanas? En A. Avila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática. 30 años de investigación en la revista* Educación Matemática. México: Sociedad Méxicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática – A. C. Somided. Pp. 63-82.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020a). *Per una teoria delle didattiche disciplinari. Saggio per docenti e ricercatori*. Prefazione di Maura Iori. Bologna: Pitagora. (Nueva edición 2023, Bologna: Bonomo).

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020b). Historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática. Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS (Enfoque Onto-Semiótico). *Paradigma*, *41*(1), 130-150.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2021a). La ricerca in Didattica della Matematica: una responsabilità dei matematici. *La matematica e la sua didattica*, *29*(1), 39-80.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2021b). Some examples of the phenomenon of metadidactic slippage in school practice. *Acta Scientiae*, *23*(4). 1-15. [In English and Spanish]. http://posgrad.ulbra.br/periodicos/index.php/acta/article/view/6647.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2024). *Historia de la didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora. (Nueva edición 2023, Bologna: Bonomo). [En idioma español: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática*. Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford y Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio]. [En idioma portugués: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2015). *Primeiros elementos de semiótica Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Prefácios de Raymond Duval, Luis Radford, Carlos Eduardo Vasco Uribe y Ubiratan D'Ambrosio. Tradução Maria Cristina Bonomi. Sao Paolo: Editora Livraria da Física].

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. IV vol. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Edizioni Dedalo.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.

Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking. The Registers of Semiotic Representations*. Foreword of Bruno D'Amore. Cham: Springer.

Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en Matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Presentación y comentarios de Bruno D'Amore (R. Duval) y Carlos Eduardo Vasco Uribe (A. Sáenz-Ludlow). Bogotá: Universidad Francisco José de Caldas.

Fandiño Pinilla, M. I. (2011). Per una buona didattica è necessario un buon Sapere. *Bollettino dei docenti di matematica*, *32*(62), 51-58.

Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Los elementos básicos sobre la utilización de la semiótica en el análisis de las situaciones de aula. *Revista Científica de Educación – EDUSER*, *4*(1), 17-42. http://revistas.ucv.edu.pe/index.php/EDUSER/article/view/1651

Fandiño Pinilla, M. I. (2020a). A proposito di relazioni fra teorie: Alcuni punti di contatto e altri di divergenza fra TAD, TSD, EOS e TO. *La matematica e la sua didattica*, *28*(2), 159-197.

Fandiño Pinilla, M. I. (2020b). Historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática. Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS. En AA. VV., Memorias del I Simposio de Educación Matematica (I SEM V), *Educaciòn matemàtica en tiempo de pandemia*. Tomo I, Universidad Nacional de Lujan, Argentina. Pp. 12-18.

Prediger, S., Bikner–Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 40*, 165–178.

Rojas Garzón, P. J. (2014): *Relación entre objeto matemático y sentidos en situaciones de transformación de tratamiento*. Prefacio de Bruno D'Amore. Bogotá: Universidad Francisco José de Caldas.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. https://rsddm.dm.unibo.it/wp-publications/2010-santi-1/.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 285-311.

Stolz, M. (2002). The History of Applied Mathematics and the History of Society. *Synthese*, *133*(1), 43–57.